Keine Ahnung von Logarithmen

Was sind denn

Logarithmen

?

Datei Nr. 12811

Stand 16. August 2022

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Logarithmen sind ein relativ einfaches Teilgebiet der Mathematik. Es hat nur den Nachteil, dass es zwar behandelt wird, dann aber lange nicht mehr vorkommt. Die Folge: Schüler stöhnen, wenn das Wort Logarithmus fällt.

Der vorliegende Text ist ein kompakter Wiederholungstext mit allen Methoden und einigen Beispielen, aber ohne Aufgaben auf 7 Seiten.

Wer mehr sucht, findet in der Mathe-CD diese Texte dazu:

12810	Grundlagen (28 Seiten)
12830	Lernprogramm (Frage-Antwort-Text) (13 Seiten)
12850	Große Aufgabensammlung (64 Seiten)
12940	Lernkarten zum Ausschneiden

Inhalt

1 Logarithmen sind Exponenten

a) In der Gleichung . . . . $2^3 = 8$

hat die Hochzahl 3 zwei Namen:

3 ist der *Exponent von 2* für das Ergebnis 8 ⟷ **3 ist der *Logarithmus von 8* zur Basis 2.**

Das ist eine Frage der Aufgabenstellung:

Geht man von der Basis 2 aus, dann heißt 3 *der Exponent von 2*,
geht man vom Ergebnis 8 aus, dann heißt 3 *der Logarithmus von 8*.

Der Logarithmus ist also immer die Hochzahl, die man für das genannte Ergebnis benötigt!

Man schreibt das so auf: $\log_2 8 = 3$ (Lies: Logarithmus von 8 zur Basis 2 gleich 3)

Und das bedeutet: Man kann 8 als Potenz schreiben mit der Basis 2 und der Hochzahl 3.

b) $2^4 = 16$

4 ist der *Exponent von 2* für das Ergebnis 16 ⟷ **4 ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2.**

Wichtig: *Bei der Verwendung des Wortes Logarithmus muss man immer angeben, auf welche Basis man sich bezieht, sonst gibt es Verwirrungen:*

4 ist der Logarithmus von 16 zur Basis 2: $\log_2 16 = 4$ denn es ist $2^4 = 16$.

4 ist der Logarithmus von 81 zur Basis 3: $\log_3 81 = 4$ denn es ist $3^4 = 81$.

n ist der Logarithmus von b zur Basis a: $\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$

Diese Beziehung zwischen Logarithmus und Potenz muss man üben und sicher beherrschen:

1. Aufgabe: Aus einer Potenz den Logarithmus ablesen

c) $4^2 = 16$ bedeutet: 2 ist der Logarithmus von 16 zur Basis 4: $\log_4 16 = 2$

d) $5^3 = 125$ 3 ist der Logarithmus von 125 zur Basis 5: $\log_5 125 = 3$

e) $3^2 = 9$ 2 ist der Logarithmus von 9 zur Basis 3: $\log_3 9 = 2$

f) $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ -2 ist der Logarithmus von $\frac{1}{9}$ zur Basis 3: $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

g) $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2}$ ist der Logarithmus von $\sqrt{2}$ zur Basis 2: $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

h) $\sqrt{5}^2 = 5$ 2 ist der Logarithmus von 5 zur Basis $\sqrt{5}$: $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

2. Aufgabe: Einen Logarithmus berechnen:

a) $\log_2 64 = ?$ Das heißt: Welchen Exponenten braucht die Basis 2 für das Ergebnis 64?

Wegen $64 = 2^6$ heißt das Ergebnis: $\log_2 64 = 6$.

Man kann dies <u>innerhalb einer Zeile</u> erledigen, indem man folgende Umformung aufschreibt. Dann erkennt man (wegen der gleichen Basis) den Exponenten = den Logarithmus:

$$\log_2 64 = \log_{\boxed{2}} \boxed{2}^6 = 6$$

Man ersetzt 64 durch 2^6 (Kopfrechnung!) und liest ab, dass 6 die Hochzahl von 2^6 ist..

b) $\log_3 81 = ?$ Umformung: $81 = 3^4$, also folgt: $\log_3 81 = \log_{\boxed{3}} \boxed{3}^4 = 4$

c) $\log_3 \frac{1}{81} = ?$ Umformung: $\frac{1}{81} = 3^{-4}$, also folgt: $\log_3 \frac{1}{81} = \log_{\boxed{3}} \boxed{3}^{-4} = -4$

d) $\log_7 \frac{1}{49} = ?$ Umformung: $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$, $\Rightarrow$ $\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = \log_{\boxed{7}} \boxed{7}^{-2} = -2$

e) $\log_3 \sqrt{3} = ?$ Umformung: $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, also folgt: $\log_3 \sqrt{3} = \log_{\boxed{3}} \boxed{3}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Solche Aufgaben werden dann schwer, wenn man die Potenzen nicht kennt:

f) $\log_2\left(4\sqrt{2}\right) = ?$ Wie stellt man $4\sqrt{2}$ als Potenz von 2 dar? $4 \cdot \sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$

oder in 1 Zeile: $\log_2 4\sqrt{2} = \overbrace{\log_2 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{2+\frac{1}{2}}}^{\text{Nebenrechnung im Kopf ??!!}} = \log_{\boxed{2}} \boxed{2}^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

g) $\log_{35} 1 = ?$ WISSEN: $a^0 = 1$ für jede Zahl $a \neq 0$, also gilt auch $35^0 = 1$. $\Rightarrow$ $\log_a 1 = 0$

Ergebnis: $\log_{35} 1 = 0$

3. Aufgabe: Einfache Logarithmusgleichungen kann man oft durch Umschreiben in eine Exponentialgleichung lösen:

$$\log_2 x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 2^4} = 16$$

$$\log_2 8 = x \Leftrightarrow \boxed{2^x = 8} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow \boxed{x^3 = 8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

2. Potenzketten-Methode für schwierige Aufgaben

a) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = ?$

Man berechnet ausgehend von der vorgegebenen Basis $\frac{1}{4}$ Potenzen bis man $\sqrt{2}$ erreicht:

$$\boxed{\tfrac{1}{4} \xrightarrow[-1]{} 4 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 2 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{2}}$$

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-1} = 4 \qquad 4^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Zusammengesetzt ergibt das: $\left(\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$

Die Exponenten werden dabei multipliziert.

Ergebnis: $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = -\frac{1}{4}$

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = ?$

$$\boxed{25 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} 5 \xrightarrow[\frac{1}{2}]{} \sqrt{5} \xrightarrow[-1]{} \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Daraus folgt $\left(\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 25^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Ergebnis: $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{16} = ?$

$$\boxed{\tfrac{1}{8} \xrightarrow[-1]{} 8 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} 2 \xrightarrow[4]{} 16 \xrightarrow[\frac{1}{3}]{} \sqrt[3]{16}}$$

denn $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ $\qquad 16^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{16}$

Daraus folgt: $\left(\left(\left(\left(\tfrac{1}{8}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\tfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{16}$

Ergebnis: $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{16} = -\frac{4}{9}$

Merke:

Aus $\text{Basis}^{\text{Exponent}} = \text{Ergebnis}$ folgt $\log_{\text{Basis}} \text{Ergebnis} = \text{Exponent}$.

Der Logarithmus bezieht sich also immer auf Basis und <u>Ergebnis</u>.
Er ist der Exponent, den die Basis erhalten muss, damit das Ergebnis folgt.

3. Logarithmengesetze

Aus Potenzregeln werden Logarithmengesetze !!!

(1) *Multiplikation von Potenzen* ***ergibt das*** ***1. Logarithmengesetz***

Bei der Multiplikation von Potenzen *mit gleicher Basis* werden die Exponenten addiert:

Beispiel: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$

1. Regel: $\underbrace{a^m}_{x} \cdot \underbrace{a^n}_{y} = \underbrace{a^{m+n}}_{x\cdot y}$

Mit Worten: Der Exponent des Produkts ist die Summe der Exponenten der Faktoren.

Als Logarithmus-Regel: $\boxed{\underbrace{\log_a(x \cdot y)}_{m+n} = \underbrace{\log_a x}_{m} + \underbrace{\log_a y}_{n}}$

---

(2) *Division von Potenzen* ***ergibt das*** ***2. Logarithmengesetz***

Für die Division von Potenzen mit gleicher Basis gilt die Regel

$$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 :$$

2. Regel: $\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Mit Worten: Der Exponent des Bruches ist die Differenz der Exponenten von Zähler und Nenner.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a\left(a^{m-n}\right) = m - n$$

Als Logarithmus-Regel: $\boxed{\underbrace{\log_a \frac{x}{y}}_{m-n} = \underbrace{\log_a x}_{m} - \underbrace{\log_a y}_{n}}$

---

(3) *Potenzieren von Potenzen* ***ergibt*** ***3. Logarithmengesetz***

Für das Potenzieren von Potenzen gilt die Regel

$$\left(2^4\right)^3 = 2^{3\cdot 4}$$

3. Regel: $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$

Daraus erhält man eine Logarithmus-Regel: Es sei $x = a^m$, also $\log_a x = m$, dann folgt:

$$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \underbrace{\log_a x}_{m}$$

Ferner gilt:

$$\log_a a = 1, \quad \log_a a^n = n \quad \text{und} \quad a^{\log_a n} = n$$

Zahlenbeispiele:

a) Was ist $\log_2\left(8\cdot\sqrt{2}\right)$?

1. Logarithmusregel anwenden: $\log_2\left(8\cdot\sqrt{2}\right)=\log_2(8)+\log_2\left(\sqrt{2}\right)=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

denn $8=2^3$ und $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$.

b) Was ist $\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)$?

1. Logarithmusregel anwenden: $\log_a\left(a\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)=\log_a(a)+\log_a\left(\sqrt[3]{a^2}\right)=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

Denn wegen $a^1=a$ gilt $\log_a(a)=1$

und wegen $\sqrt[3]{a^2}=\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ist $\log_a\left(\sqrt[3]{a^2}\right)=\frac{2}{3}$.

c) Was ist $\log_2\dfrac{32}{1024}$?

2. Logarithmusregel anwenden: $\log_2\dfrac{32}{1024}=\log_2\dfrac{2^5}{2^{10}}=\log_2\left(2^5\right)-\log_2\left(2^{10}\right)=5-10=-5$

Das geht auch durch Kürzen: $\log_2\dfrac{32}{1024}=\log_2\dfrac{2^5}{2^{10}}=\log_2\left(2^{-5}\right)=-5$

d) Was ist $\log_a\dfrac{\sqrt{a}^5}{\sqrt[5]{a^2}}$?

2. Logarithmusregel anwenden:

$$\log_a\frac{\sqrt{a}^5}{\sqrt[5]{a^2}}=\log_a\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5}{\left(a^2\right)^{\frac{1}{5}}}=\log_a\frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}=\log_a\left(a^{\frac{5}{2}}\right)-\log_a\left(a^{\frac{2}{5}}\right)=\frac{5}{2}-\frac{2}{5}=\frac{25}{10}-\frac{4}{10}=\frac{21}{10}$$

Oder durch Kürzen: $\log_a\dfrac{\sqrt{a}^5}{\sqrt[5]{a^2}}=\log_a\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5}{\left(a^2\right)^{\frac{1}{5}}}=\log_a\dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}=\log_a\left(a^{\frac{5}{2}-\frac{2}{5}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{21}{10}}\right)=\frac{21}{10}$

e) Was ist $\log_3\left(27^5\right)$?

3. Logarithmusregel anwenden: $\log_3\left(27^5\right)=\log_3\left(3^3\right)^5=5\cdot\log_3\left(3^3\right)=5\cdot 3=15$

Oder so: $\log_3\left(27^5\right)=\log_3\left(3^3\right)^5=\log_3\left(3^{3\cdot 5}\right)=\log_3\left(3^{15}\right)=15$

f) Eine Folgerung der 2. Logarithmusregel ist: $\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$

Denn $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=\underbrace{\log_a(1)}_{=0}-\log_a(x)=-\log_a(x)$

Beispiel: $\log_2\dfrac{1}{64}=-\log_2(64)=-\log_2\left(2^6\right)=-6$

4. Anwendungen

4.1 In Exponentialgleichungen wird die 3. Logarithmusregel oft benötigt:

Die Gleichung $2^x = 7$ wird logarithmiert.

Da man hier einen Taschenrechner braucht, verwendet man die Taste log
d. h. man verwendet den Logarithmus zur Basis 10:

$$\underbrace{\log_{10}\left(2^x\right)} = \log_{10}(7)$$

3. Log-Regel anwenden: $x \cdot \log_{10}(2) = \log_{10}(7) \quad | \; : \log_{10}(2)$

$$x = \frac{\log_{10}(7)}{\log_{10}(2)} \approx 2{,}807$$

```
log 7
log 2
        2.8073
```

4.2 Berechnung von Logarithmen zu einer beliebigen Basis:

Gesucht ist $x = \log_u v$

d.h. die Lösung der Gleichung $u^x = v$.

Durch Logarithmieren folgt: $\underbrace{\log_a\left(u^x\right)} = \log_a(v)$

3. Log-Regel: $x \cdot \log_a(u) = \log_a(v)$

Letzter Schritt: $x = \frac{\log_a(v)}{\log_a(u)}$

Ergebnis: $\log_u v = \frac{\log_a(v)}{\log_a(u)}$

z. B.:

$x = \log_4 11$

$4^x = 11$

$\log_{10}\left(4^x\right) = \log_{10}(11)$

$x \cdot \log_{10}(4) = \log_{10}(11)$

$\log_4 11 = x = \frac{\log_{10}(11)}{\log_{10}(4)}$

```
log 10
log 4
        1.6609
```

$\log_4(11) \approx 1{,}661 \quad \Leftrightarrow \quad 11 = 4^{1{,}661}$

Mit der Formel geht das schneller: $\log_3 30 = \frac{\lg 30}{\lg 3} \approx 3{,}0959$, $\log_{11} 20 = \frac{\lg 20}{\lg 11} \approx 1{,}2493$, usw.

4.3 Eine wichtige Anwendung sind Logarithmusgleichungen

(1) $\log_x 3 = 5$

$x^5 = 3$

$x = \sqrt[5]{3} \approx 1{,}2457$

(2) $\log_4 x = 3$

$x = 4^3$

$x = 64$

(3) $\log_5 17 = x$

$5^x = 17$

$\log_{10}\left(5^x\right) = \log_{10}(17)$

$x \cdot \log_{10}(5) = \log_{10}(17)$

$x = \frac{\log_{10} 17}{\log_{10} 5} \approx 1{,}760$

(4) $\log_2(x+20) + \log_2(x-4) = 8$

$$\log_2(x+20)(x-4) = 8$$
$$\log_2\left(x^2 + 16x - 80\right) = 8$$
$$x^2 + 16x - 80 = 2^8 = 256$$
$$x^2 + 16x - 336 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 1344}}{2} = \frac{-16 \pm 40}{2} = \begin{cases} 12 \\ -28 \end{cases}$$

Probe für $x_1 = 12$: Linke Seite = $\log_2 32 + \log_2 8 = 5 + 3 = 8$ = Rechte Seite

Probe für $x_2 = -28$: Linke Seite = $\log_2(-8) + \log_2(-32)$ nicht berechenbar!

(Mehr dazu im Text 12810 Seite 12 ff. und Text 12850)

5 Natürliche Logarithmen

In der Oberstufe verwendet man für Logarithmen meistens die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718$.

Die Logarithmen, die sich auf diese Basis e beziehen, heißen natürliche Logarithmen.

Statt $\log_e(3)$ schreibt man dann $\ln(3)$.

Beispiele:

a) $\ln(e) = 1$ denn $e^1 = e$

$\ln(e^2) = 2$ $\longrightarrow$

```
e²
                 7.389056099
ln 7.389
                 1.999992408
ln e²
                           2
```

$\ln(e^3) = 3$

$\ln(e^{-1}) = -1$

b) $e^{\ln 3} = 3$, denn im Exponenten steht $\ln 3$, und das ist laut Definition die Zahl, die man benötigt, dass das Ergebnis 3 ist:

```
ln 3
                 1.098612289
e^1.0986
                 2.999963134
e^ln 3
                           3
```

Merke: e^x und $\ln(x)$ sind Umkehrfunktionen. Verwendet man sie nacheinander, heben sie sich in ihrer Wirkung auf:

$$e^{\ln(a)} = a \quad \textbf{und} \quad \ln(e^a) = a$$

Also ist z. B. $e^{\ln 5} = 5$ und $\ln(e^{-2}) = -2$ usw.

Wichtig ist noch, dass man Gleichungen umschreiben kann:

$$e^{2x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln(5)$$

$$e^{1/x} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{8}$$

$$e^{x^2} = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \ln(25) \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\ln(25)}$$

$$\ln(2e^3) = \ln(2) + \ln(e^3) = \ln(2) + 3$$

$$\ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = \ln(1) - \ln(e^4) = 0 - 4 = -4$$

$$\ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\ln(x^2 - 4x + 4) = \ln(x-2)^2 = 2 \cdot \ln|x-2|$$

Hinweis: Weil $e^x > 0$ ist für alle x, kann man $\ln(x)$ nur berechnen, wenn $x > 0$ ist!

$(x-2)^2 > 0$ wenn $x \neq 2$ ist. Also ist $\ln(x-2)^2$ für $x \neq 2$ berechenbar.

Das wäre bei $2 \cdot \ln(x-2)$ nur für x>2 möglich. Daher verwendet man den Betrag!